

Симметричность ф-ции Грина

04/12

Ситуация: Ω -отр. обл-ть в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $\Omega \in (GO)$;

$$\exists G(x, y) = E(x - y) + g(x, y), \forall x, y \in \Omega, x \neq y,$$

приведем при $\forall$ фикс. $y \in \Omega$ вын-ся усл-я:

1) $g(\cdot, y) \in C^2(\overline{\Omega})$ и $\Delta_x g(x, y) = 0$;

2) $G(x, y)|_{x \in \partial\Omega} = 0$

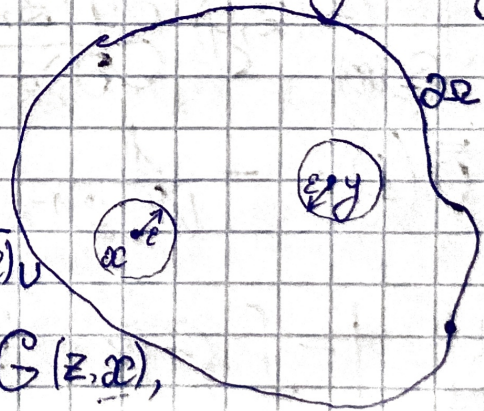
$\Rightarrow \nabla$ (о сим-ти ф-ции Грина) $G(x, y) = G(y, x)$

$\forall x, y \in \Omega, x \neq y$

▲ Фикс. $y \in \Omega, x \neq y$.

* выберем $\varepsilon > 0$. $\exists \Omega_\varepsilon = \Omega \setminus (\overline{B_\varepsilon(x)} \cup$

$\cup \overline{B_\varepsilon(y)})$. * 2 ф-ции: $u(z) \equiv G(z, x)$,



$v(z) = G(z, y)$ — гарм ф-ция в обл-ти Ω_ε ,
 причем $u(z)|_{z \in \partial\Omega} = 0$ и $v(z)|_{z \in \partial\Omega} = 0$ по св-
 там ф-ции Грина. Применим див-
 ф-лу Грина к паре $u(z), v(z)$ в обл-
 -ти Ω_ε : $\int_{\Omega_\varepsilon} (v(z) \underbrace{\Delta u(z)}_{=0} - u(z) \underbrace{\Delta v(z)}_{=0}) dz = \int_{\partial\Omega_\varepsilon} (v(z) \cdot \frac{\partial u(z)}{\partial \gamma_z} - u(z) \frac{\partial v(z)}{\partial \gamma_z}) dS_z$. Остаются в этой

ф-ле только $\int$ по сферам $S_\varepsilon(x)$ и $S_\varepsilon(y)$:

$$\begin{aligned}
 S_\varepsilon(y): & \int_{S_\varepsilon(x)} G(z, x) \frac{\partial G(z, x)}{\partial \gamma_z} dS_z - \int_{S_\varepsilon(x)} G(z, x) \frac{\partial G(z, y)}{\partial \gamma_z} dS_z + \\
 & + \int_{S_\varepsilon(y)} G(z, y) \frac{\partial G(z, x)}{\partial \gamma_z} dS_z - \int_{S_\varepsilon(y)} G(z, x) \frac{\partial G(z, y)}{\partial \gamma_z} dS_z = 0
 \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow A + B + C + D = 0$, где γ_z — внешн. нор-
 маль к $\partial\Omega_\varepsilon$, т.е. внутр. нормаль к сфе-
 рам. Пусть это слагаемое при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{S_\varepsilon(x)} G(z, y) \frac{\partial G(z, x)}{\partial \gamma_z} dS_z - \int_{S_\varepsilon(x)} G(z, y) \frac{\partial E(z, x)}{\partial \gamma_z} dS_z + \\
 &+ \int_{S_\varepsilon(x)} G(z, y) \frac{\partial g(z, x)}{\partial \gamma_z} dS_z = \int_{S_\varepsilon(x)} G(z, y) \left(-\frac{1}{\omega_n \varepsilon^{n-1}} \right) dS_z + \\
 &+ \bar{O}(1) = -\frac{1}{\omega_n \varepsilon^{n-1}} \int_{S_\varepsilon(x)} G(z, y) dS_z + \bar{O}(1) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0+} -G(x, y)
 \end{aligned}$$

$$|B| = \left| - \int_{S_\varepsilon(x)} G(z, x) \frac{\partial G(z, y)}{\partial \gamma_z} dS_z \right| \leq \int_{S_\varepsilon(x)} |E(z, x)| \left| \frac{\partial G(z, y)}{\partial \gamma_z} \right| dS_z$$

$$+ \int_{S_\varepsilon(x)} |g(z, x)| \left| \frac{\partial G(z, y)}{\partial y z} \right| dS_z \leq \omega_n \varepsilon^{n-1} |E(\varepsilon)| \cdot M_1 +$$

$$+ \bar{O}(1) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0+} 0$$

$$|C| = \left| \int_{S_\varepsilon(y)} G(z, y) \frac{\partial G(z, x)}{\partial y z} dS_z \right| \leq \int_{S_\varepsilon(y)} |E(z-y)| \left| \frac{\partial G(z, x)}{\partial y z} \right|$$

$$dS_z + \int_{S_\varepsilon(y)} |g(z, y)| \left| \frac{\partial G(z, x)}{\partial y z} \right| dS_z \leq \omega_n \varepsilon^{n-1} |E(\varepsilon)| M_2 +$$

$$+ \bar{O}(1) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0+} 0$$

$$\Delta = - \int_{S_\varepsilon(y)} G(z, x) \frac{\partial G(z, y)}{\partial y z} dS_z = - \int_{S_\varepsilon(y)} G(z, x) \frac{\partial E(z-y)}{\partial y z} dS_z$$

$$- \int_{S_\varepsilon(y)} G(z, x) \frac{\partial g(z, y)}{\partial y z} dS_z = - \int_{S_\varepsilon(y)} G(z, x) \left(- \frac{1}{\omega_n \varepsilon^{n-1}} \right) dS_z +$$

$$+ \bar{O}(1) = \frac{1}{\omega_n \varepsilon^{n-1}} \int_{S_\varepsilon(y)} G(z, x) dS_z + \bar{O}(1) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0+} G(y, x)$$

Переходя к общему пределу при $\varepsilon \rightarrow 0+$,
получаем тождество: $G(x, y) + 0 + 0 +$
 $+ G(y, x) = 0 \Rightarrow G(x, y) = G(y, x), \forall x, y \in \Omega,$
 $x \neq y$ ■

Качественный смысл св-ва симметрии:
 // Неформал. объяснение //

★ $\mathcal{A} = \Delta$ с усл. Дири, $\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{ u \in C^2(\bar{\Omega}) : u|_{\partial\Omega} = 0 \}$
 для ф-ла Грина: $\int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) dx = 0, \forall u, v \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$

$\Rightarrow (Au, v) = (u, Av), \forall u, v \in D(A) \Rightarrow A$ -симм.
 оп-р. $\neq$ обрат оп-р $B = A^{-1}$. $f = Au$ г/и $u \in D(A)$
 $\Rightarrow u = A^{-1}f = Bf$ г/прав. части f на
 практике В полук-са: из задачи $\begin{cases} \Delta u = f \text{ в } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$

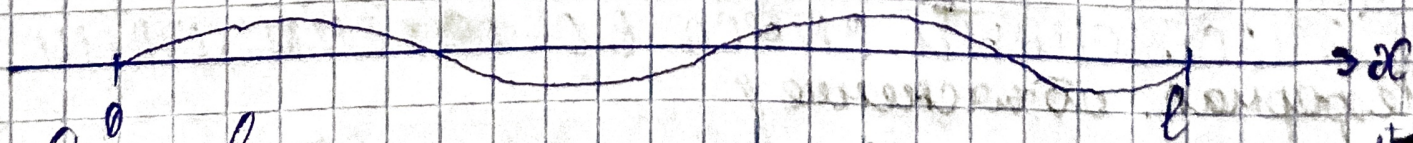
$\Rightarrow u(x) = \int G(x, y) f(y) dy$ - $\int$ ное представл. г/ оп-ра $B = A^{-1}$. Справедливы следующие:

1) A -симм $\Leftrightarrow B = A^{-1}$ -симм.

2) $\int$ ный оп-р симм. $\Leftrightarrow$ когда его ядро симм.
 Из 1, 2) $\Rightarrow G(x, y) = G(y, x), \forall x, y, x \neq y$. Это не док-во, а объяснение.

Раздел 3. Одномерное ур-ние колебаний Ур-ние колебаний струны

Задача о малых колебаниях струны
~~малые~~ колебания натянутой струны



Основные предполож-я:

1) Колеб-я происходят в одной верти-

кальной плоскости (вверх-вниз)

2) Основными являются вертикальные смещения точек струны, горизонтальными смещениями пренебрегаем.

Физич. переменные:

x - координата вдоль струны (м),

$l > 0$ - фикс. длина струны (м); $0 \leq x \leq l$ - обычно так

t - время (с); $t > 0$ - обычно так

$u = u(x, t)$ - вертикальное смещение m -к струны (м)

$T > 0$ - натяжение струны ($T = \frac{k_2 \cdot l}{\Delta x}$)

$\rho > 0$ - линейная плотность струны ($\frac{k_2}{l}$)

Вывод уравнения колебаний струны.